Schulstunde

So addiert oder subtrahiert man

Klammern

Rechnen mit Klammern - Teil 1

Datei Nr. 12011

Stand 21.1.2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Vorwort

Ich begrüße dich zu unserer Schulstunde.

Ich versuche in diesem Text, besser an deiner Seite zu sein, wenn du liest, was ich dir sagen will. Man findet im Internet Unterrichtsstunden als kleine Filmchen. Manche haben das lieber als einen Text lesen zu müssen.

Meine Texte haben den Vorteil, dass ich sie teilweise ausführlicher gestalten kann. Ich kann auch mehr an Beispielen und Übungsaufgaben anbieten. Du kannst sie ja überspringen, wenn du denkst, dass du genug gelesen hast. Und du kannst in anderen Texten nachlesen, was dir vielleicht fehlt.

Außerdem habe ich in den 20 Jahren meiner Mathe-CD die bestätigte Erfahrung gemacht, dass das selbständige und gründliche Durchdenken mathematischer Texte eine großartige Steigerung der mathematischen Denkfähig zur Folge haben kann, wenn man gründlich damit arbeitet und sich hinein vertieft.

Das Thema dieser Stunde ist rein praktischer Natur. Es geht darum, richtig mit Klammern zu rechnen.

Wird in einer Aufgabe eine Klammer verwendet, dann soll deren Wert zuerst ausgerechnet werden. Es gibt aber eine Reihe von Möglichkeiten, eine solche Aufgabe umzuschreiben, so dass sie ohne Klammern oder mit anders gesetzten Klammern dasselbe Ergebnis hat, aber vielleicht günstiger zu rechnen ist.

Der Term 46 - (24 + 16) hat beispielsweise das Ergebnis 6. Wir vergleichen ihn mit ähnlichen

Termen wie (46-24)+16 oder 46-24-16 usw. Einer davon hat auch das Ergebnis 6, der andere nicht. Wie also kann man umformen?

Wir werden lernen, welche Umformungen erlaubt sind, d.h. die zum gleichen Ergebnis führen.

Übrigens:

In der nächsten "Schulstunde" werden Klammern multipliziert oder dividiert.

1 Addition einer Summe

Es geht um Rechnungen wie -24 + (8-11) oder 20 + (8+2), also mit der Form **a + (b + c)** Solche Rechnungen können auch zu einer Geschichte gehören wie folgende:

Du hast 20 € in dem Geldbeutel. Klaus und Uta schulden dir noch 8 € bzw. 2 €.

Du kommst auf mehrere Arten zu deinem Geld: Ich zeige zwei Möglichkeiten;

(1) Klaus nimmt die 2 € von Uta und gibt dir dann 10 € auf einmal.

Der Rechenausdruck (man sagt dazu auch "Term") ist:

$$20 + \underbrace{\left(8+2\right)}_{\text{von Klaus und}} = 20 + \boxed{10} = 30$$

denn zu deinen 20 € kommt von Klaus die Summe (8 € + 2 €).

Dein Reichtum ist nun auf 30 € angewachsen.

(2) Klaus gibt dir 8 €, jetzt hast du 28 €.

Und dann kommt noch deine kleine Schwester Uta und gibt dir 2 €.

Dein Reichtum beträgt jetzt stolze 30 €.

Der Term, der dies beschreibt ist nun:

$$\underbrace{\left(20+8\right)}_{\text{Zuerst das}} + 2 = \boxed{28} + 2 = 30$$

Es geht hier um die Summe aus drei Zahlen: 20+8+2 und darum, **Wie** Menschen drei Zahlen addieren. <u>Das kann nämlich keiner auf einmal</u>. Man addiert immer erst zwei Zahlen, und dann kommt die dritte dazu. Also entweder so: 20+(8+2)=20+10=30 oder so (20+8)+2=28+2=30 Die Klammern sagen uns, was zuerst berechnet werden soll. Bei der Addition erhält man auf beide Arten dasselbe Ergebnis: 20+(8+2)=(20+8)+2, d. h. es ist egal ist, wie man die Klammern setzt, das Ergebnis ändert sich nicht.

Mathematiker schreiben dies als Formel so auf:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

Diese Regel nennt man das Assoziativgesetz.

Und dazu eine wichtige Folgerung:

Wenn egal ist, wie man die Klammern setzt, darf man sie auch weglassen.

Wenn du also eine Aufgabe hast wie 20 + 8 + 2, dann kannst du so rechnen

1. Methode: (20+8)+2=28+2=30 oder so:

2. Methode: 20 + (8 + 2) = 20 + 10 = 30

Man kann das Assoziativgesetz dazu verwenden um sich einen Rechenvorteil zu verschaffen:

Die Aufgabe 245 + 38 + 12 enthält keine Klammern.

Weil bei der Addition das Assoziativgesetz gilt, darf man sie aber setzen wie man möchte:

$$(245 + 38) + 12$$
 oder $245 + (38 + 12)$

Welche der beiden Terme ist besser zu berechnen?

Nun - wir rechnen beide durch:

$$(245 + 38)$$
 + 12 = (283) + 12 = 295 mit dem Zwischenergebnis 283.

$$245 + \underbrace{(38 + 12)}_{50} = 245 + \underbrace{50}_{50} = 295$$
 mit dem Zwischenergebnis 50.

Ich denke, jeder wird mir zustimmen, dass 245 + 38 = 283 aufwändiger ist als 38 + 12 = 50. Ich rechne viel schneller, wenn *hier* die Klammern rechts stehen. Du sicher auch.

Oder diese Aufgabe: 134 + 57 + 66

1. Methode: $(134 + 57) + 66 = \boxed{191} + 66 = 257$

2. Methode: 134 + (57 + 66) = 134 + 123 = 257

Hier allerdings liefert keine der beiden Möglichkeiten einen echten Vorteil.

Immer wenn ich so ein Beispiel im Unterricht verwende, gibt es jemand, der einen neuen Vorschlag macht. Er bzw. sie rechnet so: (134+66)+57=200+57=257.

Dieser Rechenvorteil ist aber nicht durch das Assoziativgesetz entstanden. Es wurde nämlich ausgenutzt, dass man bei der Addition **Summanden stets vertauschen darf**.

Das <u>Vertauschungsgesetz</u> oder <u>Kommutativgesetz</u> besagt, dass 57 + 66 = 66 + 57 gilt.

Diese Vertauschung bringt uns dann die 66 als zweiten Summanden direkt zu 134, so dass der Rechenvorteil 134 + 66 = 200 ist!

Diese besondere Rechenidee sieht ausführlich notiert so aus:

$$134 + \left(57 + 66\right)^{\begin{array}{c}\text{Kommutativ-}\\\text{Gesetz}\end{array}} = 134 + \left(66 + 57\right)^{\begin{array}{c}\text{Assoziativ-}\\\text{Gesetz}\end{array}} \underbrace{\left(134 + 66\right)}_{=200} + 57 = \boxed{200} + 57 = 257$$

Noch etwas ist wichtig: Wenn es heißt "Rechne der Reihe nach", dann berechnet man den Term a+b+c auf diese Weise: (a+b)+c. "Der Reihe nach" heißt also "Klammern nach links".

Jetzt weißt du also, wie man eine Summe addieren kann: Man kann rechnen wie man möchte, denn wegen der Gültigkeit des Assoziativgesetzes ist es egal, wie man die Klammern setzt. Außerdem darf man Summanden vertauschen.

Jetzt wollen wir eine Differenz addieren.

2. Addition einer Differenz

Ich erzähle wieder eine Geld-Geschichte.

Du besitzt 24 € und bekommst von Klaus 16 Euro, andererseits erhält er von dir noch 9 €. Wie kann die Abrechnung geschehen?

1. Möglichkeit: Als Klaus dir die 16 € geben will, fällt ihm ein, dass du ihm ja noch 9 € schuldest.

Das verrechnet er sofort im Kopf: Er zieht die 9 € von den 16 € ab.

Er gibt dir also $16 \in -9 \in -7 \in$. Danach besitzt du 31 €.

Dieser Handel sieht mathematisch so aus: $24 + (16 - 9) = 24 + \boxed{7} = 31$

2. Möglichkeit: Klaus gibt dir die 16 €, und du hast nun 24 € + 16 € = 40 €.

Kurz darauf kommt Klaus zurück und sagt: Mit ist soeben eingefallen, dass ich von

dir ja noch 9 € bekomme. Daraufhin gibst du ihm 9 € zurück.

Diese Aktion sieht mathematisch so aus: (24+16)-9=40-9=31

Du siehst also, dass folgendes gilt:

$$24 + (16 - 9) = (24 + 16) - 9$$

Weil man bei der blauen Rechnung der Reihe nach rechnet, kann man die Klammern weglassen:

Dann gilt also:

$$\mathbf{a} + \left(\mathbf{b} - \mathbf{c}\right) = \begin{cases} \left(\mathbf{a} + \mathbf{b}\right) - \mathbf{c} \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} \end{cases} \text{oder}$$

Wenn man sich das ausführlich betrachtet, fällt einem auf:

Wenn vor einer Differenz ein Pluszeichen steht, kann man die Klammern weglassen.

Hierzu Beispiele mit zweierlei Berechnungen:

a)
$$47 + (33 - 16) = 47 + 17 = 64$$

$$47 + (33 - 16) = \begin{cases} (47 + 33) - 16 \\ 47 + 33 - 16 \end{cases} = \boxed{80} - 16 = 64$$

b)
$$82 + (57 - 17) = 82 + 40 = 122$$

$$82 + (57 - 17) = \begin{cases} (82 + 57) - 17 \\ 82 + 57 - 17 \end{cases} = \boxed{139} - 17 = 122$$

c)
$$300 + (144 - 54) = 300 + 90 = 390$$

$$300 + (144 - 54) = \begin{cases} (300 + 144) - 54 \\ 300 + 144 - 54 \end{cases} = \boxed{444} - 54 = 390 \quad 2. \text{ Methode}$$

Wenn der Term mit der Klammer beginnt, kann man sie auch weglassen, das heißt: Rechne der Reihe nach (siehe zweite Zeile).

3 Subtraktion einer Summe

Und wieder zu Beginn eine kleine Geschichte:

Du besitzt 47 € und schuldest Klaus 16 € und Uta 14 €.

Wie kann die Abrechnung geschehen?

1. Möglichkeit: Du triffst Klaus und gibst ihm seine 16 €. Damit reduziert sich dein Vermögen auf 47 € – 16 € = 31 € . Später gibst du Uta ihre 14 Euro. Der Inhalt deines

Geldbeutels reduziert sich damit auf 17 €.

Dieses Geschehen sieht mathematisch so aus:

(47 - 16) - 14 = 31 - 14 = 17

2. Möglichkeit: Du triffst Klaus und gibst ihm seine 16 € und auch die 14 € für Uta.

Damit hat sich dein Gelbeutel so entwickelt: 47 – (16 + 14) = 47 – 30 = 17 €

Du hast hier also eine Summe ausgegeben.

Bei der ersten Möglichkeit wurde zweimal <u>nacheinander</u> subtrahiert: a-b-c. Das geschah nacheinander, was man ohne Klammern oder auch mit Klammern aufschreiben kann: (a-b)-c.

Bei der zweiten Möglichkeit wurden beide Ausgaben erst addiert und dann zusammen ausgegeben. Anstatt zweimal zu subtrahieren kann man also auch die beiden Beträge zusammen ausgeben.

Das die Regel dazu:

$$a-(b+c)=(a-b)-c$$

(a-b)-c bedeutet außerdem "der Reihe nach subtrahieren" und das schreibt man dann auch ohne

Klammern auf (Vereinbarung):

$$a-b-c:=(a-b)-c$$

= heißt "sei"

Insgesamt haben wir also

$$\mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{cases} (\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \mathbf{c} \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} \end{cases}$$
 oder

a)
$$84 - (15 + 35) = 84 - 50 = 34$$
 oder:

$$84 - (15 + 35) = \begin{cases} (84 - 15) - 35 \\ 84 - 15 - 35 \end{cases} = 69 - 35 = 34$$

In der Mitte wird der Reihe nach subtrahiert, daher kann man die Klammern weglassen.

b)
$$48 - (18 + 7) = 48 - 25 = 23$$

$$48 - (18 + 7) = \begin{cases} (48 - 18) - 7 \\ 48 - 18 - 7 \end{cases} = 30 - 7 = 23$$

Aufgabe:

Schreibe für die folgenden Terme wie hier gesehen zwei Berechnungsmethoden auf:

- 87 (37 + 19)c)
- d) 247 (55 + 15)
- e) 320 (120 + 63)

- f) 156 - (69 + 59)
 - g) 500-(130+44) h) 101-(65+35)

Lösung der Übungsaufgaben

d)
$$87 - (37 + 19)$$

1. Methode: Man rechnet so wie die Aufgabe gestellt ist, also die Klammer zuerst!

$$87 - (37 + 19) = 87 - 56 = 31$$

2. Methode Man schreibt die Aufgabe unter Anwendung der Formel um:

$$87 - (37 + 19) = \begin{cases} (87 - 37) - 19 \\ 87 - 37 - 19 \end{cases} = \boxed{50} - 19 = 31$$

Wenn die Klammer vorne steht, wird der Reihe nach gerechnet, dann kann man die Klammern auch weglassen!

e)
$$247 - (55 + 15)$$

1. Methode
$$247 - (55 + 15) = 247 - 70 = 177$$

2. Methode:
$$247 - (55 + 15) = \begin{cases} (247 - 55) - 15 \\ 247 - 55 - 15 \end{cases} = \boxed{192} - 15 = 177$$

f)
$$320 - (120 + 63)$$

1. Methode:
$$320 - (120 + 63) = 320 - 183 = 137$$

2. Methode:
$$320 - (120 + 63) = \begin{cases} (320 - 120) - 63 \\ 320 - 120 - 63 \end{cases} = 200 - 63 = 137$$

g)
$$156 - (69 + 59)$$

1. Methode:
$$156 - (69 + 59) = 156 - 128 = 28$$

2. Methode;
$$156 - (69 + 59) = \begin{cases} (156 - 69) - 59 \\ 156 - 69 - 59 \end{cases} = 87 - 59 = 28$$

h)
$$500 - (130 + 44)$$

1. Methode:
$$500 - (130 + 44) = 500 - 174 = 326$$

2. Methode:
$$500 - (130 + 44) = \begin{cases} (500 - 130) - 44 \\ 500 - 130 - 44 \end{cases} = 370 - 44 = 326$$

i)
$$101-(65+35)$$

1. Methode:
$$101 - (65 + 35) = 101 - 100 = 1$$

2. Methode:
$$101 - (65 + 35) = \begin{cases} (101 - 65) - 35 \\ 101 - 65 - 35 \end{cases} = 36 - 35 = 1$$

4 Subtraktion einer Differenz

Du weißt schon, was jetzt kommt? Eine neue Geschichte:

Du besitzt 47 €, schuldest Klaus 16 € und er hatte sich 9 Euro von dir geliehen. Wie kann die Abrechnung geschehen?

Methode: Du triffst Klaus und gibst ihm seine 16 Euro. Klaus bedankt sich und geht weg.
 Dann fällt dir ein, dass er dir ja noch 9 € geben muss.

Abrechnung:
$$(47 € -16 €) + 9 € = 31 € + 9 € = 40 €$$

2. Methode: Du triffst Klaus und gibst ihm seine 16 Euro abzüglich der 9 €, die er dir ja schuldet.

Abrechnung;
$$47 \in -(16 \in -9 \in) = 47 \in -7 \in = 40 \in$$

Wie schon in den Geschichten zuvor gibt es also auch hier zwei Methoden:

$$47 - (16 - 9) = (47 - 16) + 9$$

Rechnet man der Reihe nach, kann man die Klammern weglassen:

$$(47-16)+9=47-16+9$$

oder so:
$$47 - (16 - 9) = 47 - 16 + 9$$

$$a - (b - c) = \begin{cases} (a - b) + c \\ a - b + c \end{cases}$$
 oder
also der Reihe nach

Wenn vor einer Differenz ein Minuszeichen steht, muss man beim Weglassen der Klammer in ihr die Rechenzeichen (Vorzeichen) ändern.

Aus
$$-(16 - 9)$$
 wird also $-16 + 9$.

Weitere Beispiele:

a)
$$47 - (33 - 16) = 47 - 17 = 30$$

$$47 - (33 - 16) = \begin{cases} (47 - 33) + 16 \\ 47 - 33 + 16 \end{cases} = \boxed{14} + 16 = 30$$

1. Methode

2. Methode (günstig)

b)
$$82 - (57 - 17) = 82 - 40 = 42$$
 1. Methode (günstiger)

$$82 - (57 - 17) = (82 - 57) + 17 = 25 + 17 = 42$$
 2. Methode

c)
$$300 - (144 - 54) = 300 - 90 = 210$$
 1. Methode (günstiger)

$$300 - (144 - 54) = (300 - 144) + 54 = 156 + 54 = 210$$
 2. Methode.

5. Zusammenfassung dieser vier Fälle.

1. Fall: Addition einer Summe a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c

2. Fall: Addition einer Differenz a+(b-c)=(a+b)-c=a+b-c

3. Fall: Subtraktion einer Summe a-(b+c)=(a-b)-c=a-b-c

4. Fall: Subtraktion einer Differenz a-(b-c)=(a-b)+c=a-b+c

Man muss sich für alle vier Fälle nur eine Regel merken:

Steht vor der Klammer ein <u>Pluszeichen</u> wie im 1. und 2. Fall, dann darf man die Klammer weglassen.

Steht vor der Klammer ein <u>Minuszeichen</u>, muss man, wenn man die Klammer weglässt, alle Rechenzeichen in der Klammer ändern.

Vier Beispiele dazu:

Berechne zuerst die Aufgabe wie angeben mit der Klammer rechts. Dann lasse die Klammern weg und berechne dann der Reihe nach.

Hier wird die Klammern berechnet. Hier lässt man die Klammer weg und fasst der Reihe nach zusammen:

$$24 + \underbrace{(15+8)}_{23} = 24 + 23 = 47$$
 (1. Fall) oder $24 + (15+8) = \underbrace{24+15}_{39} + 8 = 47$

$$24 + \underbrace{(15 - 8)}_{7} = 17 \qquad (2. \text{ Fall}) \qquad \text{oder} \qquad 24 + (15 - 8) = \underbrace{24 + 15}_{39} - 8 = 31$$

$$24 - \underbrace{(15+8)}_{23} = 24 - 23 = 1$$
 (3. Fall) oder $24 - (15+8) = \underbrace{24-15}_{9} - 8 = 1$

$$24 - \underbrace{(15 - 8)}_{7} = 24 - 7 = 17$$
 (4. Fall) oder $24 - (15 - 8) = \underbrace{24 - 15}_{9} + 8 = 17$

Hier nun Aufgaben, die du bitte genauso lösen sollst.

(Wir üben jetzt, wie man die Klammern richtig weglassen darf.)

a) 80-(40-30) b) 40+(30-12)

c) 10+(20-4) d) 24+(33+17)

e) 24-(14-4) f) 40-(13+12)

g) 58 + (22-13) h) 200 - (100 + 50)

i) 55-(10-20) ... k) 24-(26-8)

Wenn Du alles bearbeitet hast, blättere um. Wir sprechen alles durch!

Hier die Lösungen:

Hier wird zuerst die Klammern berechnet.

Hier lässt man die Klammer weg und fasst dann der Reihe nach zusammen:

a)
$$80 - \underbrace{(40 - 30)}_{10} = 70$$

b)
$$40 + \underbrace{(30 - 12)}_{18} = 58$$

c)
$$10 + \underbrace{\left(20 - 4\right)}_{16} = 26$$

d)
$$24 + \underbrace{\left(33 + 17\right)}_{50} = 74$$

e)
$$24 - \underbrace{(14 - 4)}_{10} = 14$$

f)
$$40 - \underbrace{\left(13 + 12\right)}_{25} = 15$$

g)
$$58 + \underbrace{(22-13)}_{9} = 67$$

h)
$$200 - \underbrace{\left(100 + 50\right)}_{150} = 50$$

i)
$$55 - \underbrace{(10 - 20)}_{-10} = 65$$

k)
$$24 - (26 - 8) = 6$$

$$80 - \left(40 - 30\right) = \underbrace{80 - 40}_{40} + 30 = 40 + 30 = 70$$

$$40 + (30 - 12) = \underbrace{40 + 30}_{70} - 12 = 70 - 12 = 58$$

$$10 + \left(20 - 4\right) = \underbrace{10 + 20}_{30} - 4 = 26$$

$$24 + \left(33 + 17\right) = \underbrace{24 + 33}_{57} + 17 = 74$$

$$24 - (14 - 4) = \underbrace{24 - 14}_{10} + 4 = 14$$

$$40 - \left(13 + 12\right) = \underbrace{40 - 13}_{27} - 12 = 15$$

$$58 + \left(22 - 13\right) = \underbrace{58 + 22}_{80} - 13 = 67$$

$$200 - \left(100 + 50\right) = \underbrace{200 - 100}_{100} - 50 = 50$$

$$55 - (10 - 20) = \underbrace{55 - 10}_{45} + 20 = 65$$

$$24 - (26 - 8) = \underbrace{24 - 26}_{-2} + 8 = 6$$
 (schwer?)

Hinweis: In i) und k) kommen negative Zwischenergebnisse vor.

Verwendet man die andere Methode, passiert dies nicht.

Wer schon mit negativen Zahlen umgehen kann, sollte dies intensiv üben. Dazu ein paar Beispiele und einige Aufgaben.

I)
$$-24+(4-17)$$

m)
$$45-(46+24)$$

n)
$$120 + (-45 - 75)$$

o)
$$-56-(24-76)$$

p)
$$34 + (24 - 66)$$

q)
$$-122 - (-80 - 32)$$

r)
$$-12+(-24+79)$$

s)
$$28 - (-33 + 63)$$

t)
$$49 + (-69 - 21)$$

u)
$$-100 - (-34 - 54)$$

Lösungen der Aufgaben mit negativen Zahlen:

Hier wird zuerst die Klammern berechnet.

Hier lässt man die Klammer weg und fasst der Reihe nach zusammen:

1)
$$-24 + \underbrace{\left(4 - 17\right)}_{-13} = -24 + \left(-13\right) = -37$$

m)
$$45 - \underbrace{\left(46 + 24\right)}_{70} = 45 - 70 = -25$$

n)
$$120 + \underbrace{\left(-45 - 75\right)}_{-120} = 120 - 120 = 0$$

o)
$$-56 - \underbrace{\left(24 - 76\right)}_{-52} = -56 + 52 = -4$$

p)
$$34 + \underbrace{\left(24 - 66\right)}_{-42} = 34 - 42 = -8$$

q)
$$-122 - \underbrace{\left(-80 - 32\right)}_{-112} = -122 + 112 = -10$$

r)
$$-12 + \underbrace{(-24 + 79)}_{55} = -12 + 55 = 43$$

s)
$$28 - \underbrace{\left(-33 + 63\right)}_{30} = 28 - 30 = -2$$

t)
$$49 + \underbrace{\left(-69 - 21\right)}_{-90} = 49 - 90 = -41$$

u)
$$-100 - \underbrace{\left(-34 - 54\right)}_{-88} = -100 + 88 = -12$$

$$-24 + \left(4 - 17\right) = \underbrace{-24 + 4}_{-20} - 17 = -37$$

$$45 - \left(46 + 24\right) = \underbrace{45 - 46}_{-1} - 24 = -25$$

$$120 + \left(-45 - 75\right) = \underbrace{120 - 45}_{75} - 75 = 0$$

$$-56 - \left(24 - 76\right) = \underbrace{-56 - 24}_{-80} + 76 = -4$$

$$34 + \left(24 - 66\right) = \underbrace{34 + 24}_{58} - 66 = -8$$

$$-122 - \left(-80 - 32\right) = \underbrace{-122 + 80}_{-42} + 32 = -10$$

$$-12 + (-24 + 79) = \underbrace{-12 - 24}_{-36} + 79 = 43$$

$$28 - \left(-33 + 63\right) = \underbrace{28 + 33}_{61} - 63 = -2$$

$$49 + \left(-69 - 21\right) = \underbrace{49 - 69}_{-20} - 21 = -41$$

$$-100 - \left(-34 - 54\right) = \underbrace{-100 + 34}_{-66} + 54 = -12$$